ΜΑΘΗΜΑ 22ο | 17/05/2018

Ολοκληρωτική Θεωρία του Cauchy στη Μιγαδική Ανάλυση

Μιγαδικό Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα

ΟΡΙΣΜΟΣ

$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ κατά τμήματα C^1 $f : \gamma([a,b]) \longrightarrow \mathbb{C}$ συνεχής με $\gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_n$. Τότε ορίζω

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\int_{\gamma_i} f(z)\,dz}$$

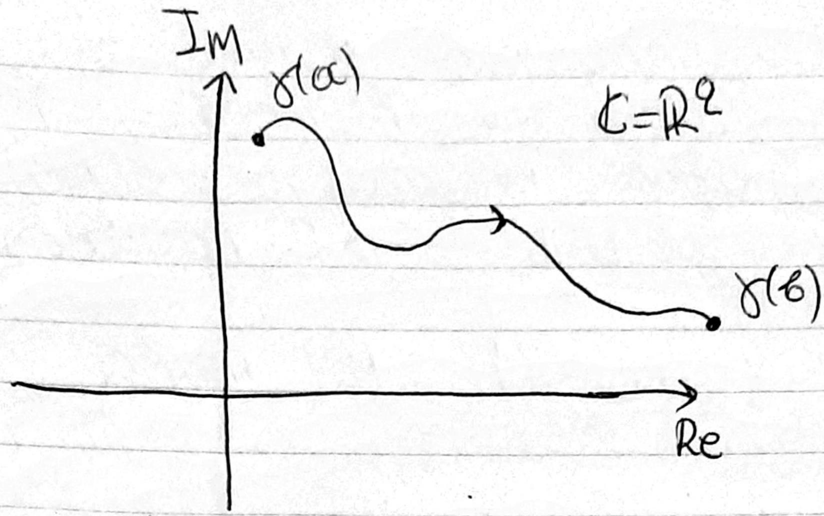
$$= \int_a^b \underset{\in \mathbb{C}}{f(\gamma(t))}\, \underset{\in \mathbb{C}}{\gamma'(t)}\,dt = \int_a^b Re(\cdot\cdot)\,dt + i\int_a^b Im(\cdot\cdot)\,dt$$

Αν $f = u + iv$ τότε $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (u,-v)^T d(x,y) + i\int_\gamma (v,u)^T d(x,y)$

το θεωρώ

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικού πεδίου

$\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} : \gamma([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με $\gamma(t) = x(t) + iy(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$



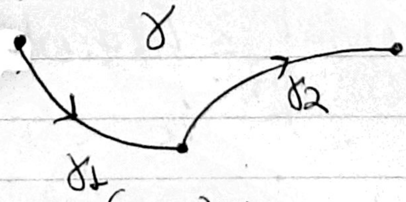
Από αυτή την αναπαράσταση, προκύπτουν οι ιδιότητες του μιγαδικού επικαμπύλιου Ολοκληρώματος (μέσω αυτών των επικαμπ. ολοκλ. διανυσμ. πεδίων)

<u>Πρόταση</u>

<u>Ιδιότητες Επικαμπύλιων Ολοκληρωμάτων</u>

α) $\int_\gamma (\lambda f + \mu g)(z)dz = \lambda \int_\gamma f(z)dz + \mu \int_\gamma g(z)dz$

β) Αν $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2$



$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

γ) <u>SOS</u> $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \|f\| L(\gamma)$

δ) $\int_{\gamma^{-1}} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$ όπου $\gamma^{-1}(t) := \gamma(a+b-t)$, $t \in [a,b]$

η αντίθετη της $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$

ε) Αν $\varphi: [A, B] \longrightarrow [a, b]$ (C^1-παραμετρικός μετασχηματισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό)
1-1 και επί συνεχώς διαφορ. και $\varphi'(t) > 0$, $t \in [A, B]$
Τότε η αναπαραμέτριση $\gamma \circ \varphi: [A, B] \longrightarrow \mathbb{C}$ (σύνθεση)

είναι μια C^1 καμπύλη (αν γ είναι C^1) και ισχύει

$$\int_{\gamma \circ \varphi} f(z)\, dz = \int_{\gamma} f(z)\, dz$$

[Άρα η παραμέτρηση της γ είναι αδιάφορη για το $\int_{\gamma} f(z)\, dz$ εκτός απο τον προσανατολισμό]

Απόδειξη του (γ) SOS

Είδαμε την προηγούμενη φορά ότι αν $g: [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ συνεχής

τότε: $\left| \int_a^b g(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |g(t)|\, dt$

$$\lambda := \frac{\left| \int_a^b g(t)\, dt \right|}{\int_a^b g(t)\, dt}$$

Άρα εδώ: $\left| \int_{\gamma} f(z)\, dz \right| \overset{\text{ορ}}{=}$

$$\overset{\text{ορ}}{=} \left| \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |\underbrace{f(\gamma(t))}_{\leq \|f\| := \max\limits_{z \in \gamma([a, b])} |f(z)|}| \cdot |\gamma'(t)|\, dt \leq \|f\| \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \|f\|\, L(\gamma)$$

Εκτός από τις παραπάνω ιδιότητες, τα μιγαδικά επικαμπ. ολοκληρώματα ολόμορφης συνάρτησης είναι και (υπό κάποιες συνθήκες) ανεξάρτητα του δρόμου

Θεώρημα 1

Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, $f: D \to \mathbb{C}$ συνεχής και $F: D \to \mathbb{C}$. Τότε είναι ισοδύναμα.

α) η F παράγουσα της f

β) $\forall$ κ.τ. C^1 καμπύλη $\gamma: [a,b] \to D$ ισχύει το εξής

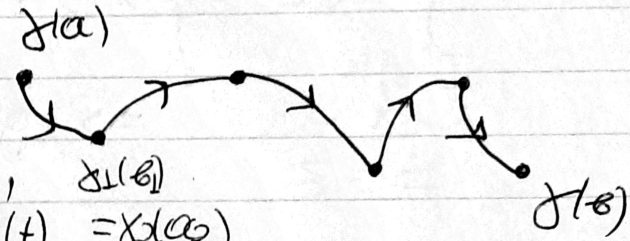
$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

<u>απόδειξη</u>

<u>(α) => (β)</u> Έστω $\gamma = \gamma_1 \oplus \ldots \oplus \gamma_n$, γ_i C^1 με

$\gamma_{i-1}(b_{i-1}) = \gamma_i(a_i)$

$\gamma(a) = \gamma(a_1)$, $\gamma(b) = \gamma_n(b_n)$



$\gamma: [a,b] \to D$

$\gamma_i: [a_i, b_i] \to D$

$$\int_\gamma F'(z)dz = \sum_i \int_{a_i}^{b_i} \underbrace{F'(\gamma_i(t))\gamma_i'(t)}_{=(F\circ\gamma_i)'(t)} dt =$$

$= \gamma_2(a_2)$

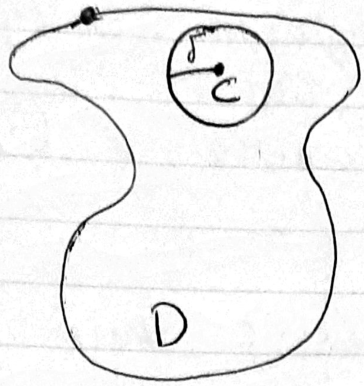
$$= \sum_i \left(F(\gamma_i(b_i)) - F(\gamma_i(a_i)) \right) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

<u>(β) => (α)</u>

Θνδο: ένα $F: D \to \mathbb{C}$ έτσι ώστε $F'(c) = f(c)$ $\forall c \in D$

Εδώ έχουμε το (β), δλδ ειδικότερα

$\forall$ $z \in D$ με $z \in D(c, \delta)$ $\delta > 0$: $\underset{\gamma(b)}{\overset{\|}{F(z)}} = \underset{\gamma(a)}{\overset{\|}{F(c)}} + \int_{[c,\zeta]=\gamma} f(\zeta)\,d\zeta$



Για τη συνάρτηση

$$F_1(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z-c}\displaystyle\int_{[c,z]} f(\zeta)\,d\zeta, & z\in D(c,\delta)\setminus\{c\} \\ f(c), & z=c \end{cases}$$

Ισχύει: $F(z) = F(c) + (z-c)F_1(z) \quad \forall z\in D(c,\delta)$

Πρέπει νδο (και αρκεί) F_1 συνεχής στο c

$$\left(\Leftrightarrow \underbrace{\lim_{z\to c} F_1(z)}_{F'(c)} = F_1(c) = f(c) \right)$$

Άρα $\underbrace{\int_{[c,z]} 1\,dz}_{=c-z} = \int_0^1 1\,\gamma'(t)\,dt$ με $\gamma(t) = c+t(z-c) \Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma'(c) = z-c$

και $L(\underbrace{[c,z]}_{=\gamma}) = \int_0^1 |\gamma'(t)|\,dt = |z-c|$

Έχουμε: $F_1(z)-F_1(c) = \dfrac{1}{z-c}\displaystyle\int_{[c,z]} (f(\zeta)-f(c))\,d\zeta$

$\forall z\in D(c,\delta)\setminus\{c\}$

Από την τριγωνική ανισότητα :

$$\left|F_1(z)-F_1(c)\right| \leq \frac{1}{|z-c|}\int_{[c,z]} \underbrace{|f(\zeta)-f(c)|}_{\leq \max_{\zeta\in[c,z]}|f(\zeta)-f(c)| = \|f-f(c)\|_{[c,z]} \leq \|f-f(c)\|_{\bar{D}(c,\delta)}} d\zeta$$

$$\leq \frac{1}{|z-c|}\|f-f(c)\|_{\bar{D}(c,\delta)} L(\gamma)$$

Θεώρημα 1

f συνεχής και F δεδομένη. Τότε $F'=f \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall\ \gamma\subset D : \int_\gamma f\,dz = F(\gamma(b))-F(\gamma(a))$

Πορίσματα / Ασκήσεις

Υπό τις ίδιες προϋποθέσεις δ.ο :

1) $f: D\to\mathbb{C}$ ολομόρφη, K κλειστή $(K\subset D) \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_K f'(\zeta)\,d\zeta = 0$

2) $f,g : D\to\mathbb{C}$ ολόμορφες, $\gamma\subset D \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_\gamma f(z)g'(z)\,dz = \left[f(z)g(z)\right]_{z=\gamma(a)}^{z=\gamma(b)} - \int_\gamma f'(z)g(z)\,dz$

Άσκηση Έστω $K \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ κατά τμ C^1 καμπύλη με αρχή το α και τέλος το b
Υπολ. $\int_K z \log z \, dz$, $\int_K (\log z)^2 dz$, $\int_K z^3 \log z \, dz$

Πρόταση (sos)

Έστω $D \subset \mathbb{C}$ τόπος (ανοικτό, συνεκτικό) και $f: D \to \mathbb{C}$ συνεχής. Τότε Τ.Α.Ε.Ι
α) η f είναι ολοκληρώσιμη (δηλ. $\exists F$ με $F' = f$)

β) $\forall$ κλειστή κ.τ. C^1 καμπύλη με $K \subset D$ ισχύει
$$\int_K f(z) dz = 0$$

Απόδειξη (α) => (β) Θεώρημα 1

(β) => (α) Έστω $\gamma : [a, b]$ κ.τ. C^1 καμπύλη με $w = \gamma(a)$, $z = \gamma(b)$
Έστω γ_w, γ_z με αρχή α και τέλος w, z

όπου $a \in D$ τυχαίο σημείο. Τότε για την

$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta$ έχουμε ότι αφού $\gamma_w \oplus \gamma \oplus \gamma_z$ είναι κλειστή κ.τ. C^1 καμπύλη

$$0 = \int_{\gamma_w} f + \int_{\gamma} f - \int_{\gamma_z} f = F(w) + \int_{\gamma} f - F(z)$$

και το αποτέλεσμα προκύπτει από το

Θεώρημα 1 (Aj) $\blacksquare$